① Sea A una matriz de orden 3, además:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b & a \\ 2 & 0 & a \\ b & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad adj(A + A^t) = \begin{bmatrix} -25 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 12 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

Determine adj(A) (OBS: $A + A^t$ es no singular)

Resolución

$$A + A^t = \begin{bmatrix} 2a & 2+b & a+b \\ 2+b & 0 & a-6 \\ a+b & a-6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$cofact(A + A^t) = \begin{bmatrix} -(a-6)^2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 12a-(a+b)^2 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \Rightarrow adj(A+A^t) = \begin{bmatrix} -(a-6)^2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 12a-(a+b)^2 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -(a-6)^2 = -25 \ (1) \wedge \ 12a - (a+b)^2 = 12 \ (2)$$

$$(a-6) = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ a = 1 \end{cases}$$

Reemplazando en (2): $a = 1 \Rightarrow 12 - (1+b)^2 = 12 \Rightarrow (1+b)^2 = 0 \Rightarrow b = -1$

si $a = 11 \Rightarrow 12 \cdot 11 - (11+b)^2 = 12 \Rightarrow 120 = (11+b)^2 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

② Dada la matriz no singular:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{bmatrix}$$

Para que valor o valores de n la matriz

$$P = \begin{bmatrix} n x_1 + y_1 & n x_2 + y_2 & n x_3 + y_3 & n x_4 + y_4 \\ n y_1 + z_1 & n y_2 + z_2 & n y_3 + z_3 & n y_4 + z_4 \\ n z_1 + w_1 & n z_2 + w_2 & n z_3 + w_3 & n z_4 + w_4 \\ n w_1 + x_1 & n w_2 + x_2 & n w_3 + x_3 & n w_4 + x_4 \end{bmatrix}$$

tiene rango máximo.

Resolución

$$\begin{vmatrix} n x_1 + y_1 & n y_1 + z_1 & n z_1 + w_1 & n w_1 + x_1 \\ n x_2 + y_2 & n y_2 + z_2 & n z_2 + w_2 & n w_2 + x_2 \\ n x_3 + y_3 & n y_3 + z_3 & n z_3 + w_3 & n w_3 + x_3 \\ n x_4 + y_4 & n y_4 + z_4 & n z_4 + w_4 & n w_4 + x_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \quad & n w_1 \\ \quad & n w_2 \\ \quad & n w_3 \\ \quad & n w_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \quad & x_1 \\ \quad & x_2 \\ \quad & x_3 \\ \quad & x_4 \end{vmatrix}$$

A B

$$A = \begin{vmatrix} n x_1 + y_1 & n x_1 + z_1 & n z_1 + w_1 & n w_1 \\ n x_2 + y_2 & n y_2 + z_2 & n z_2 + w_2 & n w_2 \\ n x_3 + y_3 & n y_3 + z_3 & n z_3 + w_3 & n w_3 \\ n x_4 + y_4 & n y_4 + z_4 & n z_4 + w_4 & n w_4 \end{vmatrix}$$

$C_3 - \frac{1}{n} C_4$

$C_2 - \frac{1}{n} C_3$

$C_1 - \frac{1}{n} C_2$

$A = n^4 \det(M)$

$$B = \begin{vmatrix} n x_1 + y_1 & n y_1 + z_1 & n z_1 + w_1 & x_1 \\ n x_2 + y_2 & n y_2 + z_2 & n z_2 + w_2 & x_2 \\ n \ldots \end{vmatrix}$$

$C_1 - n C_4$

$C_2 - n C_1$

$$B = \begin{vmatrix} n x_2 + y_2 & n y_2 + z_2 & n z_2 + w_2 \\ n x_3 + y_3 & n y_3 + z_3 & n z_3 + w_3 \\ n x_4 + y_4 & n y_4 + z_4 & n z_4 + w_4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ y_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} C_2 - nC_1 \\ C_3 - nC_2 \end{matrix}$$

$B = -\det(M)$

$\det(P) = n^4 \det(M) - \det(M) = \det(M)(n^4 - 1) \neq 0$

$n^4 - 1 \neq 0 \Rightarrow (n+1)(n-1)(n^2+1) \neq 0 \Rightarrow n \neq \pm 1$

③ Calcular la solución del sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{matrix}\right] \begin{matrix} f_{21}(-3) \\ \sim \\ f_{31}(-1) \end{matrix} \left[\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{matrix}\right]$$

$$0 \quad 4 \quad -10 \quad 2b - 4a$$

$$\sim \left[\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{b}{2} - a \\ 0 & 0 & 0 & c - 5a + 2b \end{matrix}\right].$$

Análisis de la solución

i) si $(c - 5a + 2b) \neq 0 \Rightarrow \nexists$ solución.

ii) Si $(c - 5a + 2b) = 0 \Rightarrow \exists$ solución puesto que $r(A) = r(A_a) = 2$

Cálculo de la solución:

$x + 2y - 3z = a \Rightarrow x = -5t - b + 2a + 3t + a \Rightarrow x = -2t + 3a - b$

$y - \frac{5}{2}z = \frac{b}{2} - a \Rightarrow y = \frac{5}{2}t + \frac{b}{2} - a$

$z = t$

$z = t$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a-b \\ \frac{b}{2}-a \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4) Sabemos que:

$$F_2(-1)\, F_{23}(-1)\, F_{31}(1)\, F_3\left(\frac{1}{ab-a^2}\right) F_2\left(\frac{1}{a^2-ab}\right) F_{32}\, F_{31}(-b)\, F_{21}(-1)\, A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a-1 & 1+a^2 \\ 1 & a & 1+a^2 \end{bmatrix}$$

Para que valores de a y b el sistema $AX = B$; donde $B = [1 \quad a \quad a^2 b]^t$ tiene:

i) Solución única.

ii) Infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

iii) Infinitas soluciones que dependen de 2 parámetros.

iv) Inconsistente.

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1}$$

RESOLUCIÓN

$$BA = C \Rightarrow B^{-1} B A = B^{-1} C \Rightarrow A = B^{-1} C$$

$$B = F_2(-1)\, F_{23}(-1)\, F_{31}(1)\, F_3\left(\frac{1}{ab-a^2}\right) F_2\left(\frac{1}{a^2-ab}\right) F_{32}\, F_{31}(-b)\, F_{21}(-1)$$

$$B^{-1} = F_{21}(1)\, F_{31}(b) F_{32}\, F_2(a^2-ab)\, F_3(ab-a^2)\, F_{31}(-1)\, F_{23}(1)\, F_2(-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a-1 & 1+a^2 \\ 1 & a & 1+a^2 \end{bmatrix} \overset{f_2(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ -1 & 1-a & -1-a^2 \\ 1 & a & 1+a^2 \end{bmatrix} \overset{f_{231}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1+a^2 \end{bmatrix} \ldots \rightarrow A =$$

$AX = b$ $\Rightarrow |A| \neq 0$

$|A| = 0$ $\begin{cases} a = 5 \Rightarrow \text{—} \\ b = 3a \ldots \text{—} \end{cases}$